収束のおそい級数の計算についての2〜3の数値例の紹介 (数値計算のアルゴリズムの研究)

戸田, 英雄

数理解析研究所講究録
172巻 1973年 57-77

収束のおそい級数の計算についての 2～3の数値例の紹介

電総研　戸田英雄

まえおき

収束のおそい級数の計算に　数値計算の大家は　どのような工夫をしたか？をある具体的な問題（下記の書物及び文献）で　その精神を紹介する。

研究集会で，清野氏（京大）から文献を頂いたので追加した。実際の数値計算の経過の一端と公式の誘導は附録にまとめた。

— 文献 —

[1] 林桂一　数値計算　岩波書店（昭和16）pp.100-103.

[2] 森口繁一　極板の抵抗を考えに入れた電解槽電流分布の計算　応用力学　第1巻　第6号　(1948) pp.181-186.

[3] 山内二郎　正規母集団からの標本範囲の分布関数　慶応義塾大学百年記念論文集(1958) pp.818-837.

[4] 清野 武　抵抗測定法による電氣探鑛の
理論的根據（昭和18）
電氣学会関西支部才五回電氣工学
専門講習会予稿 P7，PP.12－13．

1. Kummer の変形法を用いる例

1.1 $S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ と $S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ の計算と誤差の漸近評価

(1)　$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値は $\frac{\pi^2}{6}$ と知られているが，(1)のような級数の和として計算すると収束がおそいので，Euler－Maclaurin の公式

(2)　$$S_2=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{N}-\frac{1}{2N^2}+\sum_{i=1}^{M-1}(-)^{i-1}\frac{B_i}{N^{2i+1}}$$

で求めることがよく行われている．

（B_i は Bernoulli 数で，$B_0=1$，$B_1=-\frac{1}{2}$，$B_2=\frac{1}{6}$，$B_4=\frac{-1}{30}$
$B_6=\frac{1}{42}$，‥）

ここでは Kummer の変形法を用いて，M 項までの和を計算したときの誤差を漸近的に見積り，数値実験と比較して見た．すなわち，よく知られているように，

(3)　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=1$$

なので，

$$S_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$$

となり，(1)のまゝよりは収束が速くなる．これを更に進めて

(4) $$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + N!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$

を得る．（[1] 林桂一）

(4)を用いて，M項までの和で打ち切ると，

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + N!\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$
$$+ R_2$$

(5) $$R_2 = N!\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$

は打ち切り誤差で，この漸近的な評価は次の式となる．

(6) $$R_2 = \frac{N!}{N+1}\cdot\frac{1}{M^{N+1}} + O\left(\frac{1}{M^{N+2}}\right)$$ [附録 1]

$M=100$ で N を種々かえて，数値実験の結果と(6)を比較したのが表−1である．

表−1 R_2 の理論値と実験値

N	R_2 ((6)式による)	R_2 の実験値	N	R_2 ((6)式による)	R_2 の実験値
1	$(1/2)\times10^{-4}$	$.492\times10^{-4}$	6	1.03×10^{-12}	$.83\times10^{-12}$
2	$(2/3)\times10^{-6}$	$.642\times10^{-6}$	7	$.63\times10^{-13}$	$.48\times10^{-13}$
3	$(3/2)\times10^{-8}$	$.140\times10^{-7}$	8	$.45\times10^{-14}$	$.33\times10^{-14}$
4	$.48\times10^{-9}$	$.43\times10^{-9}$	9	$.36\times10^{-15}$	$.44\times10^{-15}$
5	$.20\times10^{-10}$	$.17\times10^{-10}$	10	$.33\times10^{-16}$	$.44\times10^{-15}$

(7) $$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \doteqdot 1.202056903159 59 \cdots$$

の場合は，Kummer の変形法で種々な公式が作れるが，ここでは林桂一[1]の式を用いた．（附録3）

(8) $$S_3 = \frac{9}{8} + \frac{25}{2^2 \cdot 3^4} - \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3} + R_3$$

(9) $$R_3 = -\frac{4}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3}$$

で M 項までの和で打ち切ったときの誤差である．

(10) $$R_3 \doteqdot -\frac{1}{6} \frac{1}{(M+2)^8} + \frac{2}{3} \frac{1}{(M+2)^9} - \frac{7}{5} \frac{1}{(M+2)^{10}} + 2 \frac{1}{(M+2)^{11}} - \frac{5}{2} \frac{1}{(M+2)^{12}} + \cdots$$ [附録 4]

と求められる．数値実験の結果は表-2 となる．

表-2 R_3 の理論値と実験値

M	R_3（10式による）	R_3 の実験値	M	R_3（10式による）	R_3 の実験値
1	$.8656 \times 10^{-5}$	$.7140 \times 10^{-5}$	9	$.5425 \times 10^{-9}$	$.5424 \times 10^{-9}$
2	$.1007 \times 10^{-5}$	$.9672 \times 10^{-6}$	10	$.2786 \times 10^{-9}$	$.2786 \times 10^{-9}$
3	$.1980 \times 10^{-6}$	$.1956 \times 10^{-6}$	15	$.1891 \times 10^{-10}$	$.1892 \times 10^{-10}$
4	$.5187 \times 10^{-7}$	$.5163 \times 10^{-7}$	20	$.2537 \times 10^{-11}$	$.2539 \times 10^{-11}$
5	$.1651 \times 10^{-7}$	$.1648 \times 10^{-7}$	40	$.1565 \times 10^{-13}$	$.2021 \times 10^{-13}$
6	$.6074 \times 10^{-8}$	$.6069 \times 10^{-8}$	80	$.7765 \times 10^{-16}$	$.4663 \times 10^{-14}$
7	$.2498 \times 10^{-8}$	$.2496 \times 10^{-8}$	90	$.3109 \times 10^{-16}$	$.4441 \times 10^{-14}$
8	$.1123 \times 10^{-8}$	$.1122 \times 10^{-8}$	100	$.1368 \times 10^{-16}$	$.4441 \times 10^{-14}$

1.2 $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k}}$ の計算 （[2] 森口繁一による）

極板の抵抗を考えに入れた電解槽電流分布の計算[2]によると，電流密度の計算で，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k}$ の値を求める必要があり，収束を速めた次の式を与えた：

$k \leq 1$ のときは，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^2(n+k)} \right) \cos nu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n} - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2} + k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2(n+k)}$$

$$= -\log\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) - k \frac{\pi^2}{4} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{3} \right\} + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2(n+k)}$$

k が非常に大きいときは，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k} = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{1-\cos u} - \frac{2}{u^2} \right)$$

$$+ \cos ku \, (-C_i \, ku) + \sin ku \left(\frac{\pi}{2} - S_i \, ku \right)$$

$$+ O\left(\frac{1}{k^4} \right)$$

[[2] の P183 参照]

ここで，

$$S_i \, x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad C_i \, x = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

である．

1.3 $\boxed{g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+n^2 s^2}} \text{ の計算（[4] 清野武による）}}$

地下に埋没した理想導体の球の探査についての抵抗測定法による電気探鉱の理論的根拠[4]によると，$s<1$で収束のおそい$g(s)$の計算が必要となり，Kummerの方法で次のように収束を速めた例がある：

$$
\begin{aligned}
g(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+n^2 s^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \frac{1}{ns} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2 s^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{n^4 s^4} - \frac{5}{16}\frac{1}{n^6 s^6} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n^2 s^2}} - \frac{1}{ns} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^3 s^3} + \frac{3}{8}\frac{1}{n^5 s^5} - \frac{5}{16}\frac{1}{n^7 s^7} \right\} \\
&= \frac{1}{s} R(1) - \frac{1}{2}\frac{1}{s^3} R(3) + \frac{3}{8}\frac{1}{s^5} R(5) - \frac{5}{16}\frac{1}{s^7} R(7) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-)^{n+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n^2 s^2}} - \frac{1}{ns} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^3 s^3} + \frac{3}{8}\frac{1}{n^5 s^5} - \frac{5}{16}\frac{1}{n^7 s^7} \right\}
\end{aligned}
$$

ただし
$$
\begin{aligned}
R(1) &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2 = 0.69314\ 71805\ 59945 \\
R(3) &= 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \cdots = 0.90154\ 26773\ 69606 \\
R(5) &= 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \cdots = 0.97211\ 97704\ 46909 \\
R(7) &= 1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \cdots = 0.99259\ 38199\ 22830
\end{aligned}
$$

sが大きいときは，無限級数の部分を省略した多項式でよい

2. 正規分布からの大きさ4の場合の標本範囲の分布の数値計算（[3] 山内二郎による）

正規母集団からの大きさnの標本範囲wの分布は，

$$(2\text{-}1)\qquad f_n(w) = n^{(2)}\int_{-\infty}^{\infty} du\ \phi\left(u+\frac{w}{2}\right)\phi\left(u-\frac{w}{2}\right)\cdot\left[\int_{u-\frac{w}{2}}^{u+\frac{w}{2}} \phi(t)\,dt\right]^{n-2}$$

ここで，

$$(2\text{-}2)\qquad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

wの分布関数 $F_n(w)$ は

$$(2\text{-}3)\qquad F_n(w) = \int_0^w f_n(t)\,dt$$

である．$n=2,3$ のときは簡単な式で与えられるが，$n\geqq 4$ の場合の数値計算用の近似式を[3]山内が工夫した．

たとえば $n=4$ のときは，

$$(2\text{-}4)\qquad f_4(w) = 4!\sqrt{2}\,(2\pi)^{-1}\,\phi(w/\sqrt{2})\cdot\left\{\frac{\pi}{2} - \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta\cdot\exp\left(-\frac{w^2}{12}\sec^2\theta\right)\right\}$$

$$(2\text{-}5)\qquad F_4(w) = 1 - 12\int_{w/\sqrt{2}}^{\infty}\phi(u)\,du + \frac{12\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}}\cdot\int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}}^{\infty}\phi(u)\,du$$

である．

これらの公式で，wの大きい所でも数値計算に便利な展開式を山内が更に計算した．

2・1　$f_4(W)$ の場合

(2−4) の積分の項は

$$\int_{-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} + \boxed{\int_{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1}\sqrt{2}}}$$

と分けて，特に後者の積分は，上限と下限における $\sec^2\theta$ の値の平均値を引き去った残りの部分について，項別積分を行って，収束を速くしてある．

すなわち，

$$(2-6)\quad \int_{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1}\sqrt{2}} d\theta\cdot \exp\left\{-\frac{W^2}{12}\sec^2\theta\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{W^2}{12}\left(1+\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2})^2}{2}\right)\right\}\cdot\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dt\,\frac{1}{1+t^2}\cdot\exp\left\{-\frac{W^2}{12}\left(t^2-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{2})^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{W^2}{12}\left(1+\frac{5}{4}\right)\right\}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}\left(\frac{W^2}{12}\right)I'_{\lambda}$$

$$(2-7)\qquad I'_{\lambda} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dt\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^{\lambda-1} - \left(1+\frac{5}{4}\right)\cdot I'_{\lambda-1}$$

$$I'_0 = \tan^{-1}\sqrt{2} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\quad I'_1 = \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(1+\frac{5}{4}\right)I'_0\ ,$$

$$\cdots$$

となる．前者の積分は

$$(2-8)\quad \int_{-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta\cdot\exp\left(-\frac{W^2}{12}\sec^2\theta\right)$$

$$= 2\exp\left(-\frac{W^2}{12}\right)\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}\left(\frac{W^2}{12}\right)^{\lambda} I''_{\lambda}$$

$$(2-9)\quad I''_{\lambda} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{1+t^2}\,t^{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\lambda-1} - I''_{\lambda-1}$$

で，結局　次の 山内 の近似式 が求められる：

$$(2-10)\quad f_4(W) = 6\sqrt{2}\,\phi\left(\frac{W}{\sqrt{2}}\right) - \frac{24\sqrt{2}}{\pi}\phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}W\right)\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}\left(\frac{W^2}{12}\right)^{\lambda} I''_{\lambda}$$

$$-\frac{12\sqrt{2}}{\pi}\phi\left(\sqrt{\frac{7}{8}}W\right)\cdot\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}\left(\frac{W^2}{12}\right)^{\lambda} I'_{\lambda}$$

表－3　(2－10) の係数

λ	$\sqrt{2}\, I''_{\lambda}$		$\sqrt{2}\, I'_{\lambda}$	
0	.870 419 752 358		.480 601 966 679	
1	.129 580 247 642		− 8.13 544 250 28$\bar{5}$	10^{-2}
2	3.70 864 180 248	10^{-2}	9.97 141 229 807	10^{-2}
3	1.29 135 819 752	10^{-2}	− 2.85 234 433 732	10^{-2}
4	4.94 356 088 191	10^{-3}	3.51 598 904 469	10^{-2}
5	2.00 088 356 253	10^{-3}	− 1.17 114 400 135	10^{-2}
6	8.40 025 528 377	10^{-4}	1.44 812 076 531	10^{-2}
7	3.61 897 548 546	10^{-4}	− 5.19 644 788 97$\bar{5}$	10^{-3}
8	1.58 935 784 78$\bar{5}$	10^{-4}	6.43 813 754 444	10^{-3}
9	7.08 436 269 771	10^{-5}	− 2.41 579 069 919	10^{-3}
10	3.19 524 256 544	10^{-5}	2.99 757 845 858	10^{-3}

2.2 $F_4(w)$ の場合

(2−5) の二重積分は X とすると、

(2−11) $$X = \frac{12\sqrt{3}}{\pi}\int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}} \int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}+w\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}-1\right)}^{\infty} \phi(u)du$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\pi}\left\{\int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\infty} du\, \phi(u)\, I_0 - \phi\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\frac{1}{1!} I_1 \right.$$

$$\left. - \phi^{(1)}\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2\frac{1}{2!} I_2 - \phi^{(2)}\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\cdot\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^3\frac{1}{3!} I_3 - \cdots \right\}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\pi}\left\{\int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\infty} du\, \phi(u)\cdot I_0 + \phi\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-)^{\lambda-1}\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^{2\lambda-1} G_\lambda\right\}$$

(2−12) $$I_\lambda = \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\tan^2\theta}-1\right)^{\lambda}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \cdots$$

(2−13) $$G_\lambda = \frac{1}{\lambda!} I_\lambda + \frac{2!}{2^1 1!}\binom{\lambda}{2}\frac{1}{(\lambda+1)!} I_{\lambda+1} + \frac{4!}{2^2 2!}\binom{\lambda+1}{4}\frac{1}{(\lambda+2)!} I_{\lambda+2}$$

$$+ \cdots + \frac{(2\lambda-2)!}{2^{\lambda-1}(\lambda-1)!}\binom{2\lambda-2}{2\lambda-2}\frac{1}{(2\lambda-1)!} I_{2\lambda-1}$$

(2−14) $$I_0 = J_{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\Big]_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

(2−15) $$J_0 = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1}\sqrt{2} = \frac{\pi}{2}$$

(2−16) $$I_1 = J_0 - J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_2 = J_{\frac{1}{2}} - 2J_0 + J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_3 = J_1 - 3J_{\frac{1}{2}} + 3J_0 - J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_4 = J_{\frac{3}{2}} - 4J_1 + 6J_{\frac{1}{2}} - 4J_0 + J_{-\frac{1}{2}}$$

. . .

ここで J_m は次の漸化式でもとめられる：

(2-17) $$J_m = \frac{1}{4}\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt\left(1+\frac{t^2}{4}\right)^{m-1} + \frac{3}{4}J_{m-1} = \frac{1}{4}K_{m-1} + \frac{3}{4}J_{m-1}$$

とおく.

(2-18) $$K_m = \int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt\left(1+\frac{1}{4}t^2\right)^{m}$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{9}{8}\right)^m + \sqrt{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m\right] + \frac{2m}{2m+1}K_{m-1}$$

(2-19) $$K_{-\frac{1}{2}} = \log 2 - \log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2\log(\sqrt{3}+1)$$

(2-19) と (2-18) から K_m を求め, (2-17) で J_m をだし (2-16) で I_λ をだして (2-13) で G_λ を求める. このようにして,

(2-20) $$1 - F_4(w) = 12\int_{w/\sqrt{2}}^{\infty}\phi(u)\,du - 10\int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\infty}\phi(u)\,du$$

$$+ \frac{12\sqrt{3}}{\pi}\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\cdot\phi\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\cdot\sum_{\lambda=1}(-)^{\lambda-1}\left(w\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^{2\lambda-2}\cdot G_\lambda$$

G_λ と I_λ の表(-4)は次に示す：

表－4　(2－20)の係数 G_λ と (2－12)の I_λ の値

λ	G_λ	I_λ
1	5.92968 5660 10^{-2}	5.92968 5660 10^{-2}
2	3.17288 1831 10^{-3}	6.05768 8623 10^{-3}
3	1.62511 3758 10^{-4}	8.64225 1229 10^{-4}
4	7.31747 9883 10^{-6}	1.42710 8216 10^{-4}
5	2.85897 0377 10^{-7}	2.54001 0564 10^{-5}
6	9.77011 1723 10^{-9}	4.72761 3856 10^{-6}
7	2.95578 2471 10^{-10}	9.06666 7346 10^{-7}
8	8.00832 1756 10^{-12}	1.77679 3839 10^{-7}
9	1.96282 2369 10^{-13}	3.53956 3734 10^{-8}
10	4.38964 8484 10^{-15}	7.14272 6659 10^{-9}
11	9.02365 3778 10^{-17}	1.45646 8191 10^{-9}
12	1.71587 2738 10^{-18}	2.99547 8444 10^{-10}
13	3.03470 3423 10^{-20}	6.20522 1132 10^{-11}
14	5.01594 0772 10^{-22}	1.29332 1748 10^{-11}
15	7.78071 9394 10^{-24}	2.70984 1638 10^{-12}

（数値例）　$\int_{w_{0.25}}^{\infty} f_4(w)\,dw = 0.25$　となる　$w_{0.25}$　を

求める。

(2－21)　$$f_4'(w) = -\frac{1}{2} w f_4(w) + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \phi\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,w\right) \int_{-w/\sqrt{3}}^{w/2\sqrt{3}} \phi(u)\,du$$

$$(2-22)\quad f_4''(w) = -f_4(w)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}w^2\right) - \frac{7}{6}w f_4'(w) + \frac{2}{\pi}\phi\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}\,w\right) + \frac{4}{\pi}\phi(w)$$

(2・23)　$w_{0.25}$ の第1近似　$w_{0.25}^{(1)} = 4.0$ として

$$F_4\left(w_{0.25}^{(1)} = 4.0\right) = 0.02418\ 33153\ 91$$

$$f_4\left(w_{0.25}^{(1)} = 4.0\right) = 0.05035\ 2524$$

$$f_4'\left(w_{0.25}^{(1)} = 4.0\right) = -0.09149\ 06503$$

$$f_4''\left(w_{0.25}^{(1)} = 4.0\right) = 0.13403\ 32522$$

から

$$w_{0.25}^{(2)} = 3.984$$

$$w_{0.25}^{(3)} = 3.98401\ 4631$$

$$(2-24)\quad F_4\left(w_{0.25}^{(3)}\right) = 0.02499\ 99999\ 802$$

となる．なお 統計数値表 JSA (1972) p61 のから

$$w_{0.25} = 3.984$$

である．

(注)　Harter (1959) は

$$F_n(w) = n\int_0^{\infty} dx\ \phi(x)\left[\int_x^{x+w}\phi(t)\,dt + \int_{-x}^{-x+w}\phi(t)\,dt\right]^{n-1}$$

で $n = 2(1)40(5)50(10)100$ の表を与えている．

また Pearson-Hartley (1942) は

$$F_n(w) = \left[\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \phi(t)\,dt \right]^n + 2n \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \phi(t) \left[\int_{t-w}^{t} \phi(x)\,dx \right]^{n-1} dt$$

で $n = 2(1)(20)$ の表をあたえた.

3. まとめ.

収束のおそい級数の和 を求めるのに, 和が求めやすい関数をしぼりだして, 残りの部分の級数の収束を速める方法 (Kummer の変換) が [2], [3], [4] の論文では自然に用いられていることが分かる.

(2-10), (2-20) の山内の近似式 は $n=4$ のときしか使えないが, 一たん誰かが作っておけば 実用的には便利である. しかし n が大きいときは 範囲の分布を級数展開で求める方法は かなり困難である.

附録1 (6) の誘導

$$R_2 = \frac{1}{N!}\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \cdot \sum_{p=1}^{N} (-)^p \frac{1}{p}\cdot\binom{N}{p}\Big/n + \sum_{n=M+1}^{\infty}\cdot\sum_{p=1}^{N}(-)^{p-1}\frac{1}{p}\binom{N}{p}\Big/(n+p)$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\cdot\binom{N}{p} + \sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{n=M+2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$+\binom{N}{1}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\binom{N}{2}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3}\binom{N}{3}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$$

$$- \cdots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p} + \sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$- \frac{1}{2}\binom{N}{2}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3}\binom{N}{3}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+3} - \cdots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p} + \frac{1}{M+2}\sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$+ \sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{n=M+2}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\binom{N}{2}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$$

$$+ \frac{1}{3}\binom{N}{3}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+3} - \cdots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p} + \frac{1}{M+2}\sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$+ \sum_{p=3}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3}\binom{N}{3}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+3} - \cdots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p} + \frac{1}{M+2}\sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$+ \frac{1}{M+3}\sum_{p=3}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p} + \sum_{p=3}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{n=M+2}^{\infty}\frac{1}{n+2}$$

$$+\frac{1}{3}\binom{N}{3}\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n+3}-\cdots$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{M+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}+\frac{1}{M+2}\sum_{p=2}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$+\frac{1}{M+3}\sum_{p=3}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}+\frac{1}{M+4}\sum_{p=4}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{M+N}\sum_{p=N}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{M+j}\sum_{p=j}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{p=j}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\cdot\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\left(\frac{j}{M}\right)^i$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\left(\frac{1}{M}\right)^{i+1}\sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\,j^i$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{M}\sum_{p=1}^{N}\sum_{j=1}^{p}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(-)^i\left(\frac{1}{M}\right)^{i+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\sum_{j=1}^{p}j^i$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{M}(-1)$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}(-)^i\left(\frac{1}{M}\right)^{i+1}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\cdot\left\{\frac{p^{i+1}}{i+1}+\frac{1}{2}p^i\right.$$

$$\left.+\frac{B_2}{2!}\,i\cdot p^{i-1}+\frac{B_3}{3!}\,i^{(2)}p^{i-2}+\frac{B_4}{4!}\,i^{(3)}p^{i-3}+\cdots\right\}$$

$$=\sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{M}+(-)\frac{1}{M^2}\sum_{p=1}^{N}(-)^p\frac{1}{p}\binom{N}{p}\cdot\left\{\frac{p^2}{2}+\frac{p}{2}\right\}$$

$$+ (-)^2 \frac{1}{M^3} \sum_{p=1}^{N} (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + B_2 \cdot p \right\}$$

$$+ (-)^3 \frac{1}{M^4} \sum_{p=1}^{N} (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^4}{4} + \frac{p^3}{2} + \frac{B_2 \cdot 3}{2} p^2 + B_3 \cdot p \right\}$$

$$+ (-)^4 \frac{1}{M^5} \sum_{p=1}^{N} (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{B_2 \cdot 4}{2!} p^3 + \frac{B_3 \cdot 4 \cdot 3}{3!} p^2 + B_4 p \right\}$$

$$+ \cdots$$

$$+ (-)^N \frac{1}{M^{N+1}} \sum_{p=1}^{N} (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^{N+1}}{N+1} + \frac{p^N}{2} + \frac{B_2 \cdot N}{2!} p^{N-1} + \frac{B_3 N^{(2)}}{3!} p^{N-2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{B_N \cdot N^{(N-1)}}{N!} \cdot p \right\}$$

ここで、 $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} (-)^p \binom{N}{p} = -1$

$$\sum_{p=1}^{N} (-)^p p^k \binom{N}{p} = 0 \qquad (1 \leq k \leq N-1 \text{ の整数})$$

$$\sum_{p=1}^{N} (-)^p p^N \binom{N}{p} = (-)^N N!$$

を用いると

$$R_2 = \left[\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] = \frac{1}{M} - \frac{1}{M^2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{M^3}(-B_2) - \frac{1}{M^4}(-B_3) + \frac{1}{M^5}(-B_4) -$$

$$+ (-)^N \frac{1}{M^{N+1}} \cdot \left\{ \frac{(-)^N N!}{N+1} - B_N \right\}$$

$$= \Big[\frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} B_1 + \frac{1}{M^3} B_2 + \frac{1}{M^4} B_3 + \frac{1}{M^5} B_4 + \cdots + \frac{1}{M^{N+1}} B_N$$

$$- \frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} B_1 - \frac{1}{M^3} B_2 + \frac{1}{M^4} B_3 - \frac{1}{M^5} B_4 + \cdots + \frac{1}{M^{N+1}} \left\{ (-)^{N+1} B_N + \frac{N!}{N+1} \right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{N!}{N+1}\right)}{M^{N+1}} + O\left(\frac{1}{M^{N+1}}\right)$$

附録 2 $\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{M^{n+1}}$ の誘導

(2-1) $$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u}\, u^{s-1}\, du$$

$u = nx$ とおくと

(2-2) $$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-nx}\, x^{s-1}\, dx$$

したがって

(2-3) $$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty e^{-nx}\, x\, dx$$

$$= \int_0^\infty x\, dx \cdot \sum_{n=M+1}^{\infty} e^{-nx}$$

$$= \int_0^\infty x\, dx \cdot e^{-(M+1)x} \left[1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots \right]$$

$$= \int_0^\infty x\, dx \cdot \frac{e^{-(M+1)x}}{1 - e^{-x}}$$

(2-4) $$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{x}{e^x - 1} \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

(2-5) $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$

$B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $\cdots$ なお

$B_{2n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$

(2-5) を用いて,

$$(2-4)\qquad \sum_{n=M+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\infty}x\,dx\cdot e^{-Mx}\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\int_0^{\infty}dx\;e^{-Mx}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{M^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{M^{n+1}}$$

附録 3　林 桂一 の (8) の誘導

$$(3-1)\qquad \frac{1}{n^3}+\frac{\frac{4}{3}}{(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3}$$

$$=\frac{(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3+\frac{4}{3}n^3}{n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3}$$

$$=\frac{1}{n^3}+\frac{\frac{1}{6}}{(n+1)^3}+\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{(n+2)^3}+\frac{\frac{1}{6}}{(n+3)^3}$$

$$+\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+1)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{(n+3)^2}$$

$$+\frac{2}{n+1}+\frac{(-4)}{n+2}+\frac{2}{n+3}$$

と部分分数にわけられる．　したがって

$$(3-2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^3}+\frac{\frac{4}{3}}{(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{n^3}+\frac{(-1)}{(n+1)^3}+\frac{\frac{7}{6}}{(n+1)^3}+\frac{\left(-\frac{7}{6}\right)}{(n+2)^3}+\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{(n+2)^3}+\frac{\frac{1}{6}}{(n+3)^3}$$

$$+\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+1)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{(n+2)^2}+\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+2)^2}+\frac{\frac{3}{4}}{(n+3)^2}$$

$$+\frac{2}{n+1}+\frac{(-2)}{n+2}+\frac{(-2)}{n+2}+\frac{2}{n+3}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{1^3} + \frac{\frac{7}{6}}{2^3} + \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{3^3} - \left(\frac{\frac{3}{4}}{2^2} + \frac{\frac{3}{4}}{3^2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 1 + \frac{262}{2^4 \cdot 3^4} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{100}{2^4 \cdot 3^4}$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{25}{2^2 \cdot 3^4}$$

附録 4 (10) の 誘導

$$R_3 = -\frac{4}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3}$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{(n+1)^3} + \frac{\frac{8}{6}}{(n+2)^3} + \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{(n+3)^3} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\frac{3}{4}}{(n+1)^2} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+3)^2} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{-2}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{(-2)}{n+3} \right]$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{(n+1)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+2)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+2)^3} + \frac{\left(-\frac{1}{6}\right)}{(n+3)^3} \right] + \sum_{n=M+1} \frac{1}{(n+2)^3}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\frac{3}{4}}{(n+1)^2} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+2)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(n+2)^2} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{(n+3)^2} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{(-2)}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{(-2)}{n+3} \right]$$

$$= \left\{ \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3} \right\} - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(M+2)^3} - \frac{1}{(M+3)^3} \right] + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{(M+2)^2} + \frac{1}{(M+3)^2} \right]$$

$$- 2 \left[\frac{1}{M+2} - \frac{1}{M+3} \right]$$

(4 − 1) $\displaystyle \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3}$

$$= \sum_{t=M+3}^{\infty} \frac{1}{t^3} = \sum_{t=M+3}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^{\infty} e^{-nx} \cdot x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 \, dx \cdot \frac{e^{-(M+3)x}}{1 - e^{-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x \, dx \cdot e^{-(M+2)x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \int_0^{\infty} x \, e^{-(M+2)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot B_n}{(M+2)^{n+2}}$$

を用いて

$$R_3 = \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{(M+2)^2} + \frac{(-\frac{1}{2})}{(M+2)^3} + \frac{\frac{1}{4}}{(M+2)^4} + \frac{0}{(M+2)^5} + \frac{(-\frac{1}{12})}{(M+2)^6} + \frac{0}{(M+2)^7} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{12}}{(M+2)^8} + \frac{0}{(M+2)^9} + \frac{(-\frac{3}{20})}{(M+2)^{10}} + \frac{0}{(M+2)^{11}} + \frac{\frac{5}{12}}{(M+2)^{12}} + \cdots \right\}$$

$$+ \left[\frac{(-\frac{1}{2})}{(M+2)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(M+2)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(M+2)^4} + \frac{0}{(M+2)^5} + \frac{\frac{1}{12}}{(M+2)^6} + \frac{0}{(M+2)^7} \right.$$

$$\left. + \frac{(-\frac{1}{4})}{(M+2)^8} + \frac{\frac{2}{3}}{(M+2)^9} + \frac{(-\frac{5}{4})}{(M+2)^{10}} + \frac{2}{(M+2)^{11}} + \frac{-\frac{35}{12}}{(M+2)^{12}} + \cdots \right]$$

$$= \frac{(-\frac{1}{6})}{(M+2)^8} + \frac{\frac{2}{3}}{(M+2)^9} + \frac{-\frac{7}{5}}{(M+2)^{10}} + \frac{2}{(M+2)^{11}} + \frac{-\frac{5}{2}}{(M+2)^{12}} + \cdots$$